1 Natürliche und ganze Zahlen

1.1 Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen und Null	$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$

Bsp.: $17 \in \mathbb{Z}$ *(„17 ist ein Element der Menge $\mathbb{Z}$")* $-12 \notin \mathbb{N}_0$ *(„-12 ist kein Element der Menge $\mathbb{N}_0$")*

1.2 Teilermengen und Vielfachenmengen

Man kann die Teiler oder die Vielfachen einer Zahl zu einer Menge zusammenfassen.

Bsp.: $V(3)$ ist die Menge aller Vielfachen der Zahl 3. $\boldsymbol{V(3) = \{3; 6; 9; 12; \ldots\}}$
$T(24)$ ist die Menge aller Teiler der Zahl 24. $\boldsymbol{T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}}$

1.3 Teilbarkeitsregeln

Eine ganze Zahl ist nur dann ohne Rest durch die Zahl … teilbar,	*wenn …*
2	die Einerziffer eine gerade Zahl ist.
3	die Quersumme durch 3 teilbar ist.
4	die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
5	die Einerziffer eine 0 oder eine 5 ist.
6	die Teilbarkeitsregeln für 2 und für 3 zutreffen.
8	die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
9	die Quersumme durch 9 teilbar ist.
10	die Einerziffer eine 0 ist.

1.4 Primfaktorzerlegung und Potenzschreibweise

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die **genau zwei verschiedene Teiler** besitzt (nämlich **1 und die Zahl selbst).**

Bsp. unter Hundert: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

Schreibt man eine natürliche Zahl als **Produkt aus Primzahlen**, so nennt man dies eine **Primfaktorzerlegung**.

Bsp.: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Gleiche Faktoren fasst man als **Potenz** zusammen.

Exponent

Basis

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-mal}$$

1.5 Dezimalsystem (Zehnersystem)

Bsp.: Die Zahl **5 263 180 213** *lautet ausgesprochen:*

„fünf Milliarden zweihundertdreiundsechzig Millionen einhundertachtzigtausendzweihundertdreizehn“

In einer Stellenwerttafel wird für jede einzelne Ziffer der Wert angegeben:

…	**Milliarden**	**Hundert Millionen**	**Zehn Millionen**	**Millionen**	**Hundert-tausender**	**Zehn-tausender**	**Tausender**	**Hunderter**	**Zehner**	**Einer**
	5	2	6	3	1	8	0	2	1	3

Zehnerpotenzen

Eine Zahl *(z.B. 3)* mit einer Zehnerpotenz *(z.B. 10^8)* zu multiplizieren, ist gleichbedeutend damit, so viele Nullen an die Zahl zu hängen, wie der Exponent angibt.

Bsp.: $3 \cdot 10^8 = 300\,000\,000$ *(eine 3 mit 8 Nullen)*

1.6 Runden

Steht rechts von der Rundungsstelle eine **$0, 1, 2, 3$ oder 4**, so **rundet man ab**.
Steht rechts von der Rundungsstelle eine **$5, 6, 7, 8$ oder 9**, so **rundet man auf**.

Bsp.: Runden auf Hundertstel: $6{,}13749 \approx 6{,}14$ $144{,}9847 \approx 144{,}98$ $87{,}14523 \approx 87{,}15$

2 Rechnen mit ganzen Zahlen

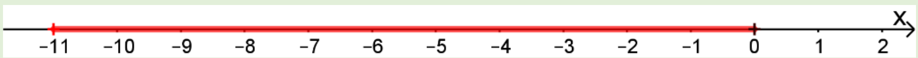
2.1 Fachbegriffe für die Grundrechenarten

	Term	Vor dem Rechenzeichen		Hinter dem Rechenzeichen	Wert des Terms	Rechenart	Verb
+	**Summe**	**1. Summand**		**2. Summand**		**Addition**	**addieren**
		3	*+*	*5*	*= 8*		
-	**Differenz**	**Minuend**		**Subtrahend**		**Subtraktion**	**subtrahieren**
		12	*-*	*9*	*= 3*		
·	**Produkt**	**1. Faktor**		**2. Faktor**		**Multiplikation**	**multiplizieren**
		2	*·*	*5*	*= 10*		
:	**Quotient**	**Dividend**		**Divisor**		**Division**	**dividieren**
		18	*:*	*3*	*= 6*		

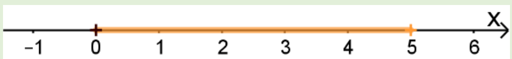
2.2 Betrag

Der Betrag einer ganzen Zahl z gibt den **Abstand zur Null** an. Für den Betrag von z schreibt man $|z|$.
Zwei ganze Zahlen mit demselben Betrag und unterschiedlichem Vorzeichen heißen **Gegenzahlen**.

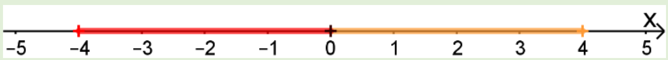
Bsp.: $|-11| = 11$



$|5| = 5$



-4 und 4 sind Gegenzahlen voneinander



2.3 Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen

Das Addieren einer **positiven Zahl** bedeutet, an der Zahlengeraden **nach rechts** zu gehen.
Das Addieren einer **negativen Zahl** bedeutet, an der Zahlengeraden **nach links** zu gehen.

Vorgehen beim Addieren zweier ganzer Zahlen:

gleiche Vorzeichen	**verschiedene Vorzeichen**
1. Das Ergebnis bekommt das **gemeinsame Vorzeichen**. 2. Um den Betrag des Ergebnisses zu erhalten, werden die **Beträge** werden **addiert**.	1. Das Ergebnis bekommt das **Vorzeichen** von der **Zahl mit dem größeren Betrag**. 2. Um den Betrag des Ergebnisses zu erhalten, zieht man den **kleineren Betrag vom größeren Betrag** ab.
Bsp.: Addiere -3 *und* -5. 1. gemeinsames Vorzeichen: **Minus** 2. $|-3| + |-5| = 3 + 5 = \mathbf{8}$ **Ergebnis:** $-\mathbf{8}$	*Bsp.: Addiere* -7 *und* 11. 1. Vorzeichen der 11: **Plus** 2. $|11| - |-7| = 11 - 7 = \mathbf{4}$ **Ergebnis:** $+\mathbf{4}$

Eine ganze Zahl **zu subtrahieren**, bedeutet, ihre **Gegenzahl zu addieren**. $Bsp.: 5 - (-8) = 5 + 8 = 13$

2.4 Multiplizieren und Dividieren ganzer Zahlen

gleiche Vorzeichen	verschiedene Vorzeichen
1. Das Ergebnis bekommt das Vorzeichen **Plus**. 2. Um den Betrag des Ergebnisses zu erhalten, werden die **Beträge multipliziert / dividiert**.	1. Das Ergebnis bekommt das Vorzeichen **Minus**. 2. Um den Betrag des Ergebnisses zu erhalten, werden die **Beträge multipliziert / dividiert**.
Bsp.: Dividiere -21 *durch* -3. 1. Vorzeichen **Plus**, da beide Zahlen negativ sind 2. $\lvert -21\rvert : \lvert -3\rvert = 21:3 = \mathbf{7}$ Ergebnis: **+7**	*Bsp.: Multipliziere* -5 *und* 11. 1. Vorzeichen **Minus**, da die Zahlen verschiedene Vorzeichen haben 2. $\lvert -5\rvert \cdot \lvert 11\rvert = 5 \cdot 11 = \mathbf{55}$ Ergebnis: $-\mathbf{55}$

Regeln für das Rechnen mit der Null:

Die Multiplikation mit Null ergibt immer Null. $Bsp.: \quad 5 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad 0 \cdot (-1000) = 0$

Teilt man Null durch eine andere Zahl, so ist das Ergebnis wieder Null. $Bsp.: \quad 0 : (-15) = 0$

Durch Null kann man nicht dividieren. $Bsp.: \quad 177:0$ ↯ $(nicht\ definiert)$

3 Rechenregeln und -gesetze

3.1 Rechenregeln bei Termen

Ein Term ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenoperationen und eventuell Klammern besteht. Seinen Namen erhält der Term durch die Rechenoperation, die zuletzt ausgeführt wird.
Die Zahlen können auch durch Platzhalter ersetzt werden.

- Was in der **Klammer** steht, wird **zuerst** berechnet.
- **Punkt**rechnung **vor Strich**rechnung
- **Potenzieren** vor Multiplizieren oder Dividieren

3.2 Das Kommutativgesetz

Es gilt für die **Addition und Multiplikation** (nicht für die Subtraktion und Division).

$$\boldsymbol{a + b = b + a} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

3.3 Das Assoziativgesetz

Es gilt in **reinen Summen und Produkten** (nicht bei gemischten Rechenarten).

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

3.4 Das Distributivgesetz

<u>mit Multiplikation:</u> Eine Summe oder eine Differenz wird mit einer Zahl multipliziert.

$$\boldsymbol{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c}$$

bzw.

$$\boldsymbol{c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b}$$

<u>mit Division:</u> Eine Klammer mit einer Addition oder Subtraktion wird durch eine Zahl geteilt.

$$\boldsymbol{(a + b) : c = a : c + b : c} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{(a - b) : c = a : c - b : c}$$

Ausmultiplizieren

Bsp.: $(3 - 7) \cdot 2 = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 2$

Ausklammern

3.5 Lösen von Gleichungen mit der Umkehraufgabe

Eine Umkehraufgabe verwendet man in Rechnungen, bei denen das Ergebnis bekannt ist, aber eine von zwei verrechneten Zahlen unbekannt ist.

Die unbekannte Zahl steht an erster Stelle:

Man rechnet **von rechts nach links mit der gegenteiligen Rechenoperation**:
Addition ↔ Subtraktion ***Multiplikation ↔ Division***

$\square + 3 = -7$	Umkehraufgabe:	$\square = -7 - 3 = -10$
$\square - 13 = -2$	Umkehraufgabe:	$\square = -2 + 13 = 11$
$\square \cdot (-2) = 8$	Umkehraufgabe:	$\square = 8 : (-2) = -4$
$\square : 5 = 3$	Umkehraufgabe:	$\square = 3 \cdot 5 = 15$

Die unbekannte Zahl steht an zweiter Stelle:

Da für die **Addition und Multiplikation** das Kommutativgesetz gilt, kann man die Rechnung als **Tauschaufgabe** mit der unbekannten Zahl an erster Stelle schreiben und dann die **Umkehraufgabe** bilden.

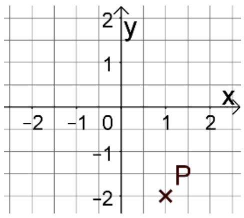
$-1 + \square = -24$	Tauschaufgabe: $\square + (-1) = -24$	Umkehraufgabe: $\square = -24 - (-1) = -23$
$5 \cdot \square = -30$	Tauschaufgabe: $\square \cdot 5 = -30$	Umkehraufgabe: $\square = -30 : 5 = -6$

Bei der Subtraktion und Division kann man keine Tauschaufgabe bilden.
Hier berechnet man eine unbekannte Zahl an zweiter Stelle, indem man die **vorgegebene Rechenoperation von links nach rechts mit dem Ergebnis der Rechnung** durchführt.

$20 : \square = 4$	Umkehraufgabe:	$\square = 20 : 4 = 5$
$17 - \square = -3$	Umkehraufgabe:	$\square = 17 - (-3) = 20$

4 Geometrische Figuren und Lagebeziehungen

4.1 Punkte im Koordinatensystem



Ein Punkt im Koordinatensystem wird durch zwei Zahlen festgelegt:
Die erste angegebene Zahl ist die x **−Koordinate**, die zweite Zahl die y **−Koordinate**.

Punkte werden mit einem Großbuchstaben bezeichnet.

$Bsp.: \boldsymbol{P(1|-2)}$

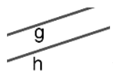
4.2 Strecken und Geraden

Die **Strecke** $\overline{AB}$ wird von den Punkten A und B begrenzt. Ihre **Länge** ist $|\overline{AB}|$.

Die **Halbgerade** (der Strahl) $[AB$ hat den Anfangspunkt A, verläuft durch B, hat aber keinen Endpunkt.

Die **Gerade** $\boldsymbol{AB}$ verläuft durch A und B, hat aber keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.

Zwei **parallele Geraden** $\boldsymbol{g}$ **und** $\boldsymbol{h}$ schneiden sich nie. Man schreibt $\boldsymbol{g || h}$.



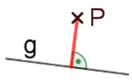
Zwei zueinander **senkrechte Geraden** $\boldsymbol{l}$ **und** $\boldsymbol{m}$ schneiden sich im rechten Winkel. Man schreibt $\boldsymbol{l \perp m}$.

4.3 Abstand

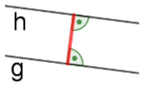
Der **Abstand** zweier geometrischer Objekte ist immer die **Länge der kürzesten Verbindungsstrecke**.

Abstand vom **Punkt** $\boldsymbol{P}$ zum **Punkt** $\boldsymbol{Q}$: $|\overline{PQ}|$

Abstand vom **Punkt** $\boldsymbol{P}$ zur **Gerade** $\boldsymbol{g}$: **Länge** der zu g **senkrechten Verbindungsstrecke** von P zu g



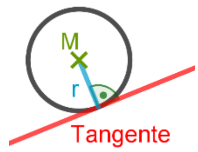
Abstand von **Gerade** $\boldsymbol{g}$ zur **parallelen Gerade** $\boldsymbol{h}$: **Länge** einer zu g und h **senkrechten Verbindungsstrecke**



4.4 Kreis

Der Kreis $k(M; r)$ hat den **Mittelpunkt M** und den **Radius r**.
Alle Punkte auf der Kreislinie haben den Abstand r vom Mittelpunkt.

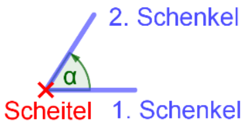
Wenn eine Gerade einen Kreis genau an einem Punkt berührt, nennt man sie auch **Tangente** an einen Kreis.



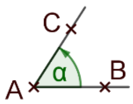
4.5 Winkel

Bezeichnungen von Winkeln:

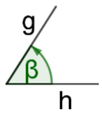
Winkel werden mit griechischen Kleinbuchstaben oder durch Angabe der Schenkel und des Scheitels mithilfe von Punkten bzw. Geraden bezeichnet. Sie werden gegen den Uhrzeigersinn gemessen:

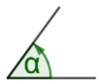
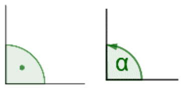
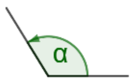
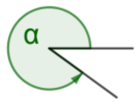
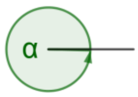


$\alpha = \sphericalangle BAC$



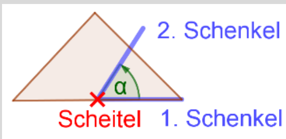
$\beta = \sphericalangle(h, g)$



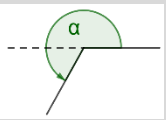
spitzer Winkel	rechter Winkel	stumpfer Winkel	gestreckter Winkel	überstumpfer Winkel	Vollwinkel
$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$\alpha = 180°$	$180° < \alpha < 360°$	$\alpha = 360°$
					

So misst man Winkel bis zu 180° mit dem Geodreieck:

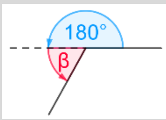
1. Geodreieck so anlegen, dass der Nullpunkt im Scheitel und die Grundlinie am 1. Schenkel anliegt
2. Ablesen des Winkels an der äußeren Winkelskala (aufsteigende Werte)



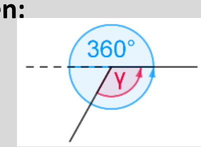
Einen überstumpfen Winkel α kann man durch Zerlegen auf zwei Weisen bestimmen:



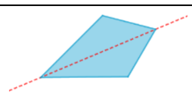
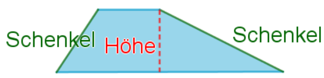
<u>Möglichkeit 1:</u>
β ausmessen
Berechne: $\alpha = 180° + \beta$



<u>Möglichkeit 2:</u>
γ ausmessen
Berechne: $\alpha = 360° - \gamma$



4.6 Besondere Vierecke

Quadrat	- alle Seiten sind gleich lang - alle Innenwinkel sind rechte Winkel	
Rechteck	- alle Innenwinkel sind rechte Winkel	
Parallelogramm	- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel	
Raute	- alle Seiten sind gleich lang	
Drachenviereck	- eine Diagonale ist Symmetrieachse	
Trapez	- zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel	

5 Größen und ihre Einheiten

5.1 Maßeinheiten

Jede Größe besteht aus Maßzahl und Maßeinheit.

Länge	Masse	Zeitdauer
$1\,cm = 10\,mm$	$1\,g = 1000\,mg$	$1\,min = 60\,s$
$1dm = 10\,cm$	$1kg = 1000\,g$	$1h = 60\,min$
$1m = 10dm$	$1t = 1000\,kg$	$1d = 24\,h$
$1\,km = 1000\,m$		

Geld	$1\,€ = 100\,ct$

5.2 Rechnen mit Größen

Um Größen miteinander verrechnen zu können, muss man sie in die gleiche Maßeinheit umrechnen:

Bsp.: $53\,dm + 412\,cm + 62\,mm = 530\,cm + 412\,cm + 6{,}6\,cm = 948{,}6\,cm$

5.3 Maßstab

$1 : 1000$

Länge auf dem Plan — Länge in Wirklichkeit

Bsp.: *3,2 cm auf dem Plan entsprechen* $1000 \cdot 3{,}2\,cm = 3200\,cm = 32\,m$ *in Wirklichkeit.*

5.4 Dreisatz

Bsp.: 10 Eier kosten 3 €. Wie viel kosten 6 Eier?

$$\begin{array}{lrcl l}
:10 & 10\,Eier & \triangleq & 3€ = 300ct & :10 \\
 & 1\,Ei & \triangleq & 30ct & \\
\cdot 6 & 6\,Eier & \triangleq & 180ct = 1{,}80€ & \cdot 6
\end{array}$$

6 Flächen

6.1 Einheiten bei Flächen

Ein Quadrat mit Seitenlänge 1m hat den Flächeninhalt $\mathbf{1m \cdot 1m = 1m^2}$. *(sprich: „Quadratmeter“)*
Entsprechendes gilt für andere Einheiten.

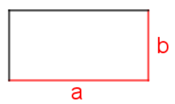
Für das Umwandeln von Flächeneinheiten benötigt man den Umrechnungsfaktor 100:

$$\mathbf{1\,m^2 = 100\,dm^2 \quad ; \quad 1dm^2 = 100cm^2 \quad ; \quad 1cm^2 = 100mm^2}$$

Besondere Flächeneinheiten **Hektar** und **Ar**: $\mathbf{1km^2 = 100ha \;;\; 1ha = 100a \;;\; 1a = 100m^2}$

6.2 Flächeninhalt und Umfang eines Rechtecks

Den Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet man aus **Länge a** und **Breite b**: $\boldsymbol{A_{Rechteck} = a \cdot b}$

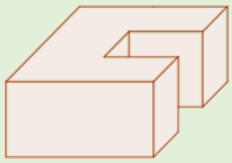


Der Umfang gibt an, wie lang die Berandungslinie einer Figur ist. $\boldsymbol{U_{Rechteck} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)}$

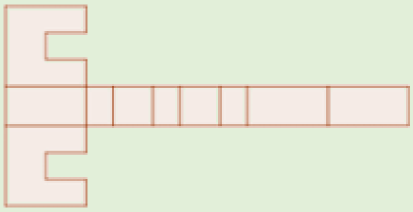
6.3 Oberflächeninhalt eines Körpers

Den Oberflächeninhalt eines Körpers ermittelt man aus dem Flächeninhalt des Netzes des Körpers.

Bsp.: Körper als Schrägbild:



Netz:



Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu.