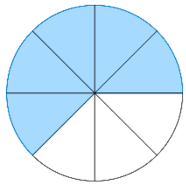
1 Schreibweisen und Definition von Brüchen

1.1 Echte Brüche

$\frac{z}{n}$ ← Zähler / ← Nenner



Mit Brüchen kann man den **Anteil** eines Ganzen angeben.

> $\frac{5}{8}$ *bedeutet: Der ganze Kreis wird in* 8 *Teile geteilt, von denen man* 5 *Teile nimmt.*

1.2 Dezimalzahlen

Eine Dezimalzahl ist eine Kommazahl. Bsp.: $26{,}352$

… Zehner Einer Zehntel Hundertstel Tausendstel …

- Man spricht von einem **endlichen Dezimalbruch**, wenn die Reihe der Nachkommastellen irgendwann endet.
  Bsp.: $0{,}25$ oder $-45{,}11347$
- Man spricht von einem **periodischen Dezimalbruch**, wenn sich ab einer bestimmten Stelle nach dem Komma eine Ziffer oder Ziffernfolge unendlich oft wiederholt. *Bsp.:* $0{,}\overline{4}$ oder $-9115{,}2\overline{367}$

Jeden Bruch kann man in einen endlichen oder periodischen Dezimalbruch umwandeln. (z.B. durch schriftliche Division) Umgekehrt kann man auch jeden endlichen oder periodischen Dezimalbruch in einen Bruch umwandeln.

Einen vollständig gekürzten Bruch kann man genau dann in einen endlichen Dezimalbruch umwandeln, wenn der Nenner keine Primfaktoren außer 2 und 5 enthält:

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$	$\frac{7}{40} = \frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot5} = 0{,}175$	$\frac{4}{30} = \frac{2}{15} = \frac{2}{3\cdot5} = 0{,}1\overline{3}$
1 : 3 = 0, 3 3 … -0 1 0 -9 1 0 -9 … *(Addieren von Dezimalbrüchen vgl. 3.2)*	7 : 4 0 = 0, 1 7 5 -0 7 0 -4 0 3 0 0 -2 8 0 2 0 0 -2 0 0 0	4 : 3 0 = 0, 1 3 3 … -0 4 0 -3 0 1 0 0 -9 0 1 0 0 -9 0 …

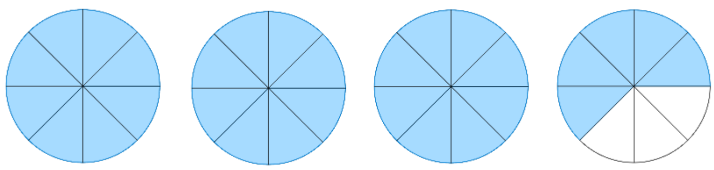
1.3 Unechte Brüche

Brüche, bei denen der Zähler größer oder gleich dem Nenner ist, nennt man unechte Brüche. *Bsp.:* $\frac{9}{4}$
Sie lassen sich übersichtlicher als gemischte Brüche darstellen:

1.4 Gemischte Brüche

$G\frac{z}{n}$ ← Zähler / ← Nenner / Ganze

Bsp.: $\frac{29}{8} = 3\,\frac{5}{8}$

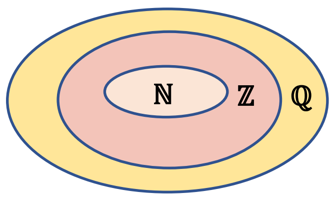


1.5 Brüche als Zahlen

Jede Zahl, die man als Bruch $\frac{z}{n}$ schreiben kann mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, nennt man **rationale Zahl**.

Eine Bruchzahl ist ein **Q**uotient: $\frac{5}{8} = 5:8$

Daher wird die **Menge der rationalen Zahlen** auch mit $\mathbb{Q}$ abgekürzt.



Bsp.: $-\frac{3}{7};\ 18\frac{1}{4};\ -17;\ \frac{2}{3};\ 0;\ 10{,}55;\ 6{,}5\overline{81};\ 2{,}\overline{3}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

(„Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der ganzen Zahlen, welche eine Teilmenge der rationalen Zahlen sind.“)

2 Potenzen

2.1 Potenzen mit negativen Exponenten

$\boldsymbol{q^{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q^n}} \quad (q \in \mathbb{Q}, q \neq 0;\ n \in \mathbb{N})$

$Bsp. 1:\ 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $\quad Bsp. 2:\ (\frac{2}{5})^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{5})^3} = \frac{1}{\frac{8}{125}} = \frac{125}{8}$

2.2 Zehnerpotenzen

Das Multiplizieren mit einer Zehnerpotenz $\mathbf{10}^{\boldsymbol{n}}$ bzw. $\mathbf{10}^{-\boldsymbol{n}}$ entspricht dem Verschieben des Kommas um n Stellen.

Ist der **Exponent positiv**, wird das Komma nach **rechts** verschoben. $Bsp.: 532{,}167 \cdot \mathbf{10^2} = 53216{,}7$

Ist der **Exponent negativ**, wird das Komma nach **links** verschoben. $Bsp.: 145{,}2 \cdot \mathbf{10^{-4}} = 0{,}01452$

3 Rechnen mit Brüchen

3.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Beim Erweitern und Kürzen **verändert sich der Wert eines Bruches nicht.**

Erweitern: Zähler und Nenner werden **mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert**. $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$

Kürzen: Zähler und Nenner werden **durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert**. $\frac{10}{25} = \frac{10:5}{25:5} = \frac{2}{5}$

3.2 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

- **Brüche:** 1. Man macht die Brüche gleichnamig. (Erweitern/Kürzen)
  2. Man addiert/subtrahiert die Zähler und behält den Nenner bei.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

- **Dezimalbrüche**: Man addiert/subtrahiert stellenweise. (Komma unter Komma)

$$246{,}568 + 14{,}948 = 260{,}948$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 4 & 6 & , & 5 & 6 & 8 \\ + & & {}_1 1 & 4 & , & {}_1 3 & 8 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 0 & , & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

3.3 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Man **multipliziert** zwei Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{21}{40}$

Ganze Zahlen kann man als Bruch umschreiben: $\frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{1} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

Man **dividiert** durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.
Auch hierbei können ganze Zahlen in Brüche umgeschrieben werden.

Bsp. 1: $\frac{1}{2} : \frac{6}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 6} = \frac{7}{12}$ *Bsp. 2:* $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2} : \frac{4}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

3.4 Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche **multipliziert** man zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas. Anschließend setzt man das Komma so, dass das Ergebnis **ebenso viele Stellen nach dem Komma hat wie beide Faktoren zusammen**.

Bsp. 1:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 5, & 4 & 1 & \cdot & 2, & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 2 & & \\ & & {}_1 & 5 & 4 & 1 & \\ \hline 1 & 1, & 3 & 6 & 1 & & \end{array}$$

$5{,}41 \cdot 2{,}1 = 11{,}361$

Bsp. 2: $0{,}041 \cdot 0{,}2 = 0{,}0082$

Man **dividiert einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl** genauso wie man zwei natürliche Zahlen schriftlich dividiert. Beim Überschreiten des Kommas setzt man auch im Ergebnis das Komma. Ggf. ergänzt man im Dividenden hinter dem Komma weitere Nullen, sodass kein Rest bleibt.

$$\begin{array}{l} 53{,}82 : 4 = 13{,}455 \\ \underline{-4} \\ \;13 \\ \underline{-12} \\ \;\;\;18 \\ \;\;\underline{-16} \\ \;\;\;\;\;22 \\ \;\;\;\;\underline{-20} \\ \;\;\;\;\;\;\;20 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{-20} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Statt **durch eine Dezimalzahl zu teilen**, verschiebt man im Divisor und im Dividenden das Komma um dieselbe Anzahl von Stellen nach rechts (bzw. ergänzt ggf. Nullen), sodass eine Division durch eine ganze Zahl entsteht.

Bsp. 1: $8{,}43 : 0{,}2 = 84{,}3 : 2 = 42{,}15$ *(Komma um 1 Stelle verschoben)*

Bsp. 2: $6{,}5 : 0{,}25 = 650 : 25 = 26$ *(Komma um 2 Stellen verschoben)*

4 Prozentrechnung

4.1 Prozentbegriff

Prozent ist eine andere Bezeichnung für Hundertstel (*lat.: pro centum = im Verhältnis zu Hundert*). Die Prozentschreibweise wird häufig verwendet, um Anteile anzugeben. Man kann Prozente in Brüche oder Dezimalbrüche umwandeln und umgekehrt:

Bsp. 1: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\ \% = 0{,}75$

Bsp. 2: $\frac{7}{15} = 0{,}4\overline{6} = 46{,}\overline{6}\ \%$

$$\begin{array}{l} 7 : 15 = 0{,}466\ldots \\ \underline{-0} \\ \ \ 70 \\ \ \ \underline{60} \\ \ \ 100 \\ \ \ \underline{-90} \\ \ \ \ \ 100 \\ \ \ \ \ \underline{-90} \\ \ \ \ \ \ \ \ldots \end{array}$$

4.2 Grundgleichung der Prozentrechnung

Prozentsatz vom Grundwert ist Prozentwert
Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Die gesuchte Größe kann durch diese Grundgleichung der Prozentrechnung, eine Umkehraufgabe dazu oder mithilfe des Dreisatzes berechnet werden.

Bsp. 1 (Prozentsatz gesucht): *Bestimme, wie viel Prozent* $10\ €$ *von* $50\ €$ *sind.*

Rechenweg mit der Grundgleichung:

$x \cdot 50\ € = 10\ €$

Umkehraufgabe:

$x = 10\ € : 50\ € = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$

Rechenweg mit dem Dreisatz:

$$\begin{array}{ccc} & 50\ € \mathrel{\hat=} 100\ \% & \\ :5 & & :5 \\ & 10\ € \mathrel{\hat=} 20\ \% & \end{array}$$

Antwort: $10\ €$ sind $20\ \%$ von $50\ €$.

Bsp. 2 (Grundwert gesucht): *Marina bastelt Einladungskarten zu ihrer Geburtstagsfeier. Sie hat nach* 10 *Minuten bereits* $8\ \%$ *der Karten fertiggestellt. Berechne, wie lange sie wohl insgesamt braucht.*

Rechenweg mit der Grundgleichung:

$8\ \% \cdot x = 10\ min$

Umkehraufgabe: $x = 10\ min : 8\ \%$

$= 10\ min : \frac{8}{100}$

$= 10\ min \cdot \frac{100}{8}$

$= 125\ min$

Rechenweg mit dem Dreisatz:

$$\begin{array}{ccc} & 10\ min \mathrel{\hat=} 8\ \% & \\ :2 & & :2 \\ & 5\ min \mathrel{\hat=} 4\ \% & \\ \cdot 25 & & \cdot 25 \\ & 125\ min \mathrel{\hat=} 100\ \% & \end{array}$$

Antwort: Marina braucht insgesamt 125 Minuten (also etwas mehr als 2 Stunden) zum Basteln ihrer Karten.

Bsp. 3 (Prozentwert gesucht): *Berechne* $25\ \%$ *von* $14\ kg$.

Rechenweg mit der Grundgleichung:

$25\ \% \cdot 14\ kg = x$

$x = 0{,}25 \cdot 14\ kg = 3{,}5\ kg$

Rechenweg mit dem Dreisatz:

$$\begin{array}{ccc} & 14\ kg \mathrel{\hat=} 100\ \% & \\ :4 & & :4 \\ & 3{,}5\ kg \mathrel{\hat=} 25\ \% & \end{array}$$

Antwort: $25\ \%$ von $14\ kg$ sind $3{,}5\ kg$.

4.3 Prozentuale Änderungen

Eine Erhöhung/Verringerung **um p** % wird zum Grundwert dazu addiert/vom Grundwert abgezogen.

Wenn man $30\ kg$ *um* $15\ \%$ *verringert, sind das* $30\ kg - \mathbf{0{,}15 \cdot 30\ kg} = 30\ kg - 4{,}5\ kg = 25{,}5\ kg$

Eine Erhöhung/Verringerung des Grundwerts **auf p** % beinhaltet den Grundwert und die Veränderung.

Wenn man $30\ kg$ *auf* $120\ \%$ *erhöht, sind das* $\mathbf{1{,}2 \cdot 30\ kg} = 36\ kg$

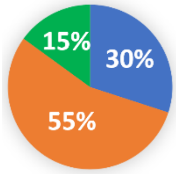
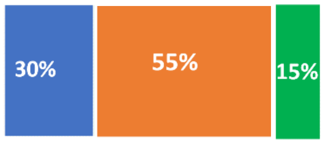
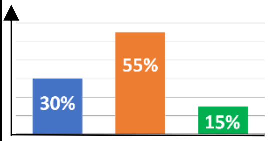
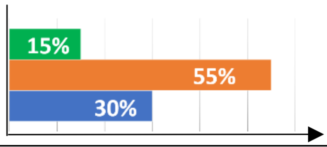
5 Daten und Diagramme

5.1 Absolute und relative Häufigkeiten

Eine **absolute Häufigkeit** ist eine konkrete Anzahl. Die **relative Häufigkeit** ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl. Häufig wird sie in **Prozent** angegeben. $\textbf{relative Häufigkeit} = \frac{\textbf{absolute Häufigkeit}}{\textbf{Gesamtzahl}}$

Bsp.: In einem Mäppchen befinden sich 24 Stifte. Davon sind 6 bereits so aufgebraucht, dass man sie nicht mehr benutzen kann. Aufgebrauchte Stifte: **Absolute Häufigkeit: 6** **Relative Häufigkeit:** $\frac{6}{24} = 25\%$

5.2 Diagramme

Kreisdiagramm	Die **Größe des Mittelpunktwinkels** entspricht dem jeweiligen Anteil. $100\% \triangleq 360°$ $:100$ $1\% \triangleq 3{,}6°$ $:100$ $\cdot 55$ $55\% \triangleq 55 \cdot 3{,}6° = 198°$ $\cdot 55$	
Streifendiagramm	Die **Länge der Abschnitte** entspricht dem jeweiligen Anteil.	
Säulendiagramm und Balkendiagramm	Die **Höhe der Säulen** bzw. die **Länge der Balken** entspricht dem jeweiligen Anteil.	 

5.3 Das arithmetische Mittel

Das **arithmetische Mittel** wird im Alltag auch als Durchschnitt, Mittelwert oder Mittel bezeichnet.

Man berechnet es so: $\frac{\textbf{Summe der einzelnen Werte}}{\textbf{Gesamtanzahl der Werte}}$

Bsp.:
Auf ihrem Schulweg sammelt Ella heruntergefallene Walnüsse auf:
Durchschnittlich pro Tag gefundene Walnüsse: $\frac{5+18+3+2+8}{5} = \frac{36}{5} = \mathbf{7{,}2}$

Tag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Anzahl Walnüsse	5	18	3	2	8

6 Flächeninhalt

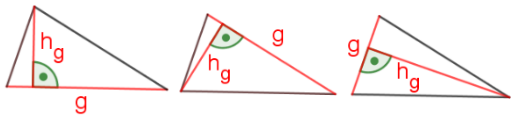
6.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms

In einem Parallelogramm nennt man den Abstand zwischen zwei parallelen Seiten (oder deren Verlängerung) **Höhe.**

Den Flächeninhalt kann man von jeder Seite ausgehend berechnen. Diese Seite nennt man oft **Grundseite $\boldsymbol{g}$**, die entsprechende **Höhe $\boldsymbol{h_g}$**.

Für den **Flächeninhalt eines Parallelogramms** gilt: $\boldsymbol{A_{Parallelogramm} = g \cdot h_g}$

6.2 Flächeninhalt eines Dreiecks

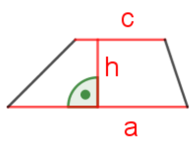


In einem Dreieck nennt man den Abstand zwischen einer Ecke und der gegenüberliegenden Seite (oder deren Verlängerung) **Höhe.**

Den Flächeninhalt kann man von jeder Seite ausgehend berechnen. Diese Seite nennt man oft **Grundseite $\boldsymbol{g}$**, die entsprechende **Höhe $\boldsymbol{h_g}$**.

Für den **Flächeninhalt eines Dreiecks** gilt: $\boldsymbol{A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g}$

6.3 Flächeninhalt eines Trapezes



In einem Trapez nennt man die beiden **parallelen Seiten** oft $\boldsymbol{a}$ **und** $\boldsymbol{c}$, den Abstand zwischen den beiden parallelen Seiten (oder deren Verlängerung) nennt man **Höhe $\boldsymbol{h}$.**

Für den **Flächeninhalt eines Trapezes** gilt: $\boldsymbol{A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$

7 Volumen

7.1 Volumeneinheiten

Ein Würfel mit Kantenlänge 1m hat das Volumen $\mathbf{1m \cdot 1m \cdot 1m = 1m^3}$**.** (sprich: „Kubikmeter“) Entsprechendes gilt für andere Einheiten.

Für das Umwandeln von Volumeneinheiten benötigt man den Umrechnungsfaktor 1000:

$$\boldsymbol{1\ m^3 = 1000\ dm^3} \quad ; \quad \boldsymbol{1\ dm^3 = 1000\ cm^3} \quad ; \quad \boldsymbol{1\ cm^3 = 1000\ mm^3}$$

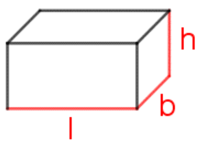
Flüssigkeitsmengen werden oft in l (Litern), ml (Millilitern) und hl (Hektolitern) angegeben:

$$\boldsymbol{1\ l = 1\ dm^3} \quad ; \quad \boldsymbol{1\ ml} = 0{,}001\ l = 0{,}001\ dm^3 = \boldsymbol{1\ cm^3} \quad ; \quad \boldsymbol{1\ hl = 100\ l}$$

7.2 Volumen eines Quaders

Das Volumen eines Quaders berechnet man aus **Länge $\boldsymbol{l}$**, **Breite $\boldsymbol{b}$** und **Höhe $\boldsymbol{h}$**: $\boldsymbol{V_{Quader} = l \cdot b \cdot h}$

Um das Volumen korrekt berechnen zu können, müssen alle Streckenlängen in dieselbe Einheit umgewandelt werden.



Ein Quader mit Länge $5\ cm$*, Breite* $32\ mm$ *und Höhe* $1{,}4\ cm$ *hat das Volumen*
$V = 5\ cm \cdot 32\ mm \cdot 1{,}4\ cm = 5\ cm \cdot 3{,}2\ cm \cdot 1{,}4\ cm = 22{,}4\ cm^3$.