# 1 Terme

## 1.1 Definition eines Terms

Ein Term ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenoperationen und eventuell Klammern sowie oft aus mindestens einer Variablen besteht. Die Variablen sind Platzhalter für Zahlen.

*Bsp.:* $T_1(x) = 3x^4 - 2x + 5$ $T_2(x; y) = 2\,(x + y)$ $T_3(a) = -\frac{2}{3}a^2 + 7a$

Man kann für die Variablen in Termen Zahlen einsetzen und erhält dadurch verschiedene Werte eines Terms. Eine Auswahl solcher Termwerte lässt sich übersichtlich in einer Wertetabelle darstellen:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_1(x) = 3x^4 - 2x + 5$ | 57 | 10 | 5 | 6 | 49 |

## 1.2 Addieren und Subtrahieren gleichartiger Produkte

Gleichartige Produkte addiert bzw. subtrahiert man, indem man **die Koeffizienten vor den Variablen** addiert bzw. subtrahiert.

*Bsp.:* $\mathbf{4}xy^3 + \mathbf{6}xy^3 = \mathbf{10}xy^3$ $\mathbf{5}a^4bc - \mathbf{11}a^4bc = \mathbf{-6}a^4bc$

## 1.3 Minusklammer

Um eine Minusklammer aufzulösen, muss man jedes (Vor)zeichen in der Klammer ändern.

*Bsp.:* $7-(4+1) = 7 - 4 - 1 = 2$ $3 - (2 - 8) = 3 - 2 + 8 = 9$

## 1.4 Ausmultiplizieren und Faktorisieren

Ausmultiplizieren

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$$

Faktorisieren/ Ausklammern

*Bsp.:* **Ausmultiplizieren**: $(3 + x) \cdot 2 = 6 + 2x$ **Faktorisieren**: $10y - 15y^2 = 5y \cdot (2 - 3y)$
*(Gemeinsame Faktoren stehen außerhalb der Klammer.)*

## 1.5 Multiplizieren von Summen

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert und alle so entstandenen Produkte addiert.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}$$

*Bsp.1:* $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{3z}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{2}) = (x + (-3z)) \cdot \big(y + (-2)\big) = x \cdot y + x \cdot (-2) + (-3z) \cdot y + (-3z) \cdot (-2)$
$= \boldsymbol{xy - 2x - 3yz + 6z}$

## 1.6 Die binomischen Formeln

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

### 1.7 Potenzgesetze

**1. Potenzen mit gleicher Basis** $a^2 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+5} = a^7$

*„Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die **Exponenten addiert** und die Basis beibehält.“*

**2. Potenzen mit gleichem Exponenten** $a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^3$

*„Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die **Basen in einer Klammer multipliziert** und diese mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.“*

**3. Potenzen von Potenzen**

$$(a^2)^3 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ mal}} \cdot \underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ mal}} \cdot \underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ mal}}}_{3\text{ mal}} = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

*„Eine Potenz wird potenziert, indem man die beiden **Exponenten miteinander multipliziert**.“*

## 2 Gleichungen

### 2.1 Lineare Gleichungen lösen

$$Bsp.: 5x - 7 = 3x + 2$$

Äquivalenzumformungen sind Umformungen, bei der die Lösungen der Gleichung gleich bleiben.

| Folgende Äquivalenzumformungen sind beim Lösen linearer Gleichungen sinnvoll: | |
|---|---|
| **1. Termumformungen** rechts und links vom Gleichheitszeichen | $2(2x - 3,5) + x = 4x + 2 - x$<br>$4x - 7 + x = 3x + 2$<br>$5x - 7 = 3x + 2 \quad \vert -3x + 7$ |
| **2. Addition oder Subtraktion** eines Terms oder einer Zahl **auf beiden Seiten** der Gleichung<br>*Ziel: „Alles mit $x$ soll auf einer Seite stehen, alle Zahlen ohne $x$ auf der anderen Seite.“* | $5x - 3x = 2 + 7$<br>$2x = 9 \quad \vert :2$ |
| **3. Multiplikation** mit einer Zahl $(\neq 0)$ **oder Division** durch eine Zahl $(\neq 0)$ **auf beiden Seiten** | $x = \frac{9}{2} = 4,5$ |

### 2.2 Lösungen

Die Lösung(en) einer Gleichung kann man als Menge schreiben:

| Lösung (Beispiel) | zugehörige Lösungsmenge |
|---|---|
| $\mathbf{x = 4,5}$ *(konkrete Zahl als Lösung)* | $\mathbf{L = \{4,5\}}$ *(Die Gleichung ist nur durch die Zahl 4,5 lösbar.)* |
| $\mathbf{4 = 4}$ *(wahre Gleichung)* | $\mathbf{L = \mathbb{Q}}$ *(Die Gleichung ist für alle rationalen Zahlen lösbar.)* |
| $\mathbf{0 = -2}$ *(unwahre Gleichung)* | $\mathbf{L} = \{\}$ oder $\mathbf{L} = \emptyset$ *(Die Gleichung ist unlösbar. Man spricht von einer leeren Lösungsmenge.)* |

### 2.3 Grundgleichung der Prozentrechnung

**Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert**

Die gesuchte Größte kann mithilfe von Äquivalenzumformungen bestimmt werden.

*Bsp.:* *Bestimme, wie viel Prozent 10 € von 50 € sind.*

$x \cdot 50\text{ €} = 10\text{ €} \qquad \vert : 50\text{ €}$

$x = 10\text{ €} : 50\text{ €} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$

**Antwort:** 10 € sind 20 % von 50 €.

# 3 Kenngrößen von Daten

## 3.1 Statistische Kenngrößen

**„Statistische Kenngrößen“** eines Datensatzes sind
das **arithmetische Mittel** (vgl. Grundwissen 6, Kapitel 4.3), der **Median**, die **Quartile** und die **Spannweite**.

## 3.2 Median

Der Median ist bei ungerader Anzahl von Daten **der Wert in der Mitte** des geordneten Datensatzes, bei gerader Anzahl **das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte** stehenden Werte des geordneten Datensatzes.

*Bsp.:* Datensatz: $4;\ -3;\ 6;\ 5{,}2;\ 7{,}1;\ 9;\ -4{,}5; 7{,}5;\ 5; 2$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| geordnete Daten | -4,5 | -3 | 2 | 4 | 5 | 5,2 | 6 | 7,1 | 7,5 | 9 |
| Platznummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Median: $\frac{5+5{,}2}{2} = \mathbf{5{,}1}$

## 3.3 Quartile

Der Median „zerlegt“ einen geordneten Datensatz in einen unteren und einen oberen Block.

Das **untere Quartil** ist der **Median des unteren Blocks**, das **obere Quartil** der **Median des oberen Blocks**.
Der Median selbst gehört zu keinem der beiden Blöcke.

*Bsp.:* Datensatz: $4;\ -3;\ 6;\ 5{,}2;\ 7{,}1;\ 9;\ -4{,}5; 7{,}5;\ 5; 2$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| geordnete Daten | -4,5 | -3 | 2 | 4 | 5 | 5,2 | 6 | 7,1 | 7,5 | 9 |
| Platznummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

unteres Quartil: $\mathbf{2}$ oberes Quartil: $\mathbf{7{,}1}$

## 3.4 Spannweite

Die Spannweite ist die **Differenz aus dem größten und dem kleinsten Wert** des Datensatzes.

*Bsp.:* Datensatz: $4;\ -3;\ 6;\ 5{,}2;\ 7{,}1;\ 9;\ -4{,}5; 7{,}5;\ 5; 2$

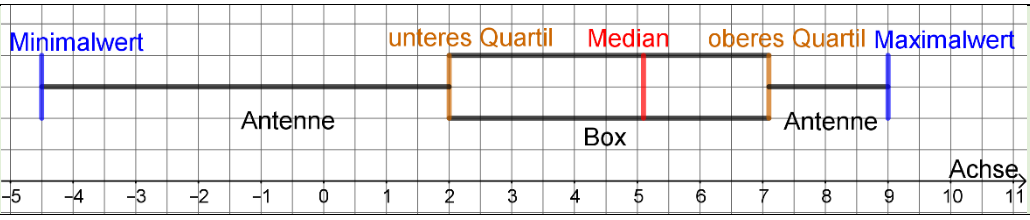
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| geordnete Daten | -4,5 | -3 | 2 | 4 | 5 | 5,2 | 6 | 7,1 | 7,5 | 9 |
| Platznummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Spannweite: $9 - (-4{,}5) = \mathbf{13{,}5}$

## 3.5 Boxplot

Ein Boxplot veranschaulicht Minimalwert, Maximalwert, Quartile und Median eines Datensatzes.
Er wird entlang einer Achse mit gleichmäßig verteilten Werten gezeichnet:

*Boxplot zum obigen Beispiel:*

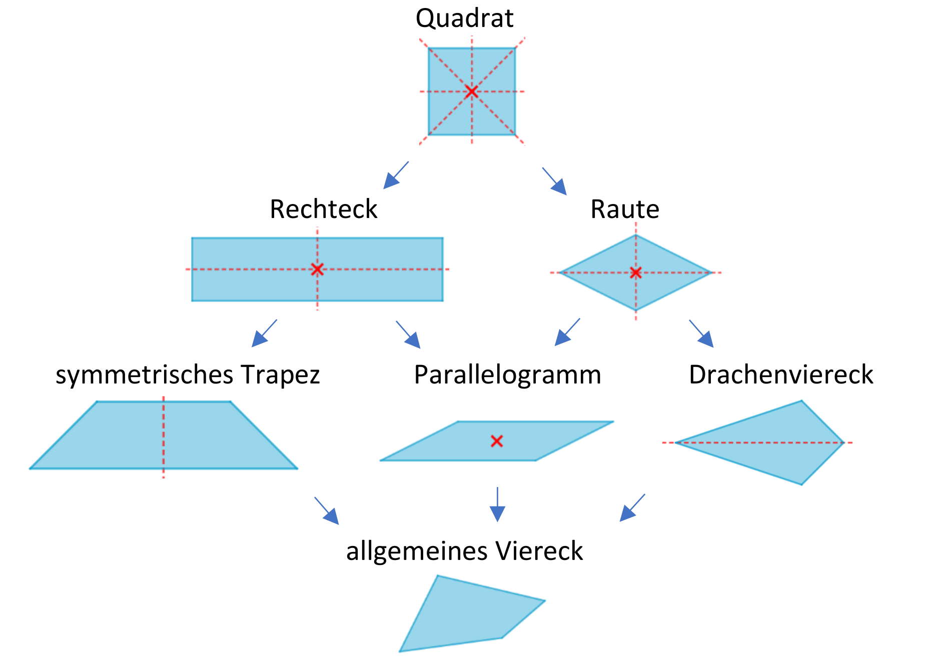


# 4 Achsen- und punktsymmetrische Vierecke

In der Darstellung rechts sind besondere Vierecke nach der Anzahl ihrer Symmetrien geordnet.

Je mehr Symmetrien ein Viereck aufweist, desto weiter oben steht es und desto spezieller ist es festgelegt.

Ist ein Viereck z.B. ein Rechteck, so ist es gleichzeitig auch ein spezielles symmetrisches Trapez und ein spezielles Parallelogramm.

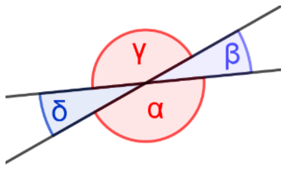



# 5 Winkelbeziehungen

## 5.1 Winkel an einer Geradenkreuzung

Zwei **gegenüberliegende Winkel** an einer Geradenkreuzung nennt man **Scheitelwinkel**.
Scheitelwinkel sind **gleich groß**. ($\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$)

Zwei **nebeneinanderliegende Winkel** an einer Geradenkreuzung nennt man **Nebenwinkel**.
Nebenwinkel **ergänzen sich zu 180°**. ($z.B.: \alpha + \beta = 180°; \beta + \gamma = 180°$)




## 5.2 Winkel an einer Doppelkreuzung von Geraden

Wenn zwei Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, nennt man die gleichfarbig eingezeichneten Winkelpaare jeweils…

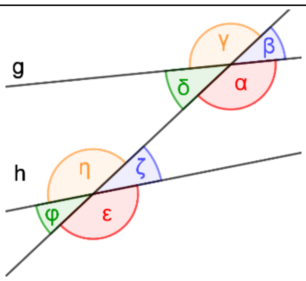
**… Stufenwinkel**

$\alpha = \varepsilon$

$\beta = \zeta$

$\gamma = \eta$

$\delta = \varphi$



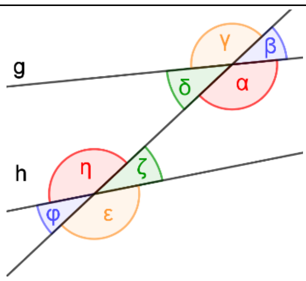

**… Wechselwinkel**

$\alpha = \eta$

$\beta = \varphi$

$\gamma = \varepsilon$

$\delta = \zeta$

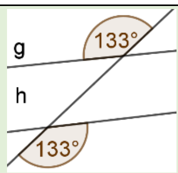



**Wenn** zwei Geraden $\boldsymbol{g}$ **und** $\boldsymbol{h}$ **parallel** sind,
**dann** ist jedes Paar von **Stufenwinkeln oder Wechselwinkeln gleich groß**.

**Wenn** an zwei Geraden $g$ und $h$ ein Paar von **Stufenwinkeln oder Wechselwinkeln gleich groß** ist,
**dann** liegen $\boldsymbol{g}$ **und** $\boldsymbol{h}$ **parallel** zueinander.

*Bsp.: Begründe, ob die Geraden $g$ und $h$ parallel zueinander liegen.*

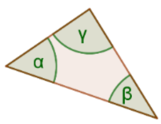
Die Geraden $g$ und $h$ liegen parallel zueinander, da zwei Wechselwinkel (nämlich die beiden eingezeichneten $133°$ – Winkel) gleich groß sind.




## 5.3 Winkelsumme im Vieleck

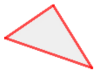
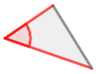
In jedem **Dreieck** beträgt die Summe der drei Innenwinkel $\mathbf{180°}$. $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Allgemein: In jedem $\boldsymbol{n}$ – **Eck** beträgt die Summe der n Innenwinkel $(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \cdot \mathbf{180°}$.



# 6 Kongruenzsätze für Dreiecke

**Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent** (d.h. deckungsgleich), wenn folgende Größen übereinstimmen:

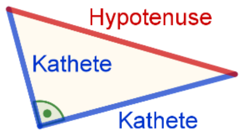
- alle drei Seiten ($SSS$) 
- eine Seite und zwei gleich liegende Winkel ($WSW/SWW$) 
- zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel ($SWS$) 
- zwei Seiten und der Gegenwinkel der längeren Seite ($SsW$) 

Entsprechend ist jedes **Dreieck eindeutig konstruierbar**, von dem diese Größen gegeben sind.

# 7 Besondere Dreiecke

## 7.1 Das rechtwinklige Dreieck

Ein Dreieck mit einem $90° -$ Winkel heißt rechtwinklig. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt Hypotenuse, die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten.

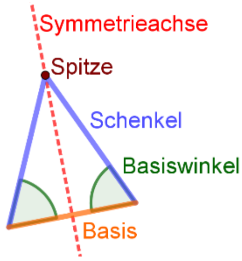



## 7.2 Das gleichschenklige Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten nennt man gleichschenklig. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite **Basis** und die beiden an der Basis anliegenden Winkel **Basiswinkel**.

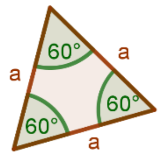
<u>**Satz vom gleichschenkligen Dreieck**</u>

Trifft auf ein Dreieck eine der folgenden Aussagen zu, so gelten auch die beiden anderen:
- Das Dreieck ist **gleichschenklig**.
- Das Dreieck ist **achsensymmetrisch**.
- Das Dreieck besitzt **zwei gleich große Winkel**.




## 7.3 Das gleichseitige Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt gleichseitig. Alle Innenwinkel betragen $60°$.




# 8 Satz des Thales

## 8.1 Definition Thaleskreis

Zu einer Strecke $\overline{AB}$ nennt man den **Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$** Thaleskreis über $\overline{AB}$.

## 8.2 Satz des Thales

**Wenn** ein Dreieck $ABC$ **bei $C$ einen rechten Winkel** hat, **dann** liegt **$C$ auf dem Thaleskreis** über $\overline{AB}$.

## 8.3 Umkehrung zum Satz des Thales

**Wenn** der Punkt **$C$ auf dem Thaleskreis** über $\overline{AB}$ liegt, **dann** ist das Dreieck $ABC$ **rechtwinklig bei $C$.**