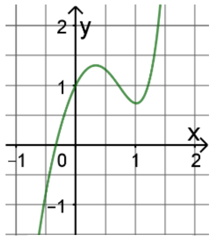
1 Funktionen

1.1 Definition Funktion

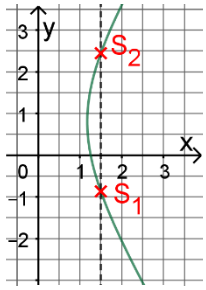
Eine Funktion ist eine **eindeutige Zuordnung** $x \mapsto y$. **Jedem x − Wert wird genau ein y − Wert zugeordnet**.

Diese Funktionsvorschrift wird in der Regel mithilfe eines Funktionsterms angegeben.
Einzelne Wertepaare der Zuordnung können mithilfe einer Wertetabelle übersichtlich dargestellt werden.

Die Zuordnung kann in einem Koordinatensystem veranschaulicht werden. Der Graph einer Funktion darf jede Parallele zur y − Achse höchstens einmal schneiden.



Graph einer Funktion



kein Graph einer Funktion

Die **Definitionsmenge D** einer Funktion gibt an, welche Zahlen in einen Funktionsterm (für die Variable x) eingesetzt werden dürfen.

Die **Wertemenge W** einer Funktion ist die Menge aller Werte y, die der Funktionsterm $f(x)$ nach allen Einsetzungen von x annehmen kann.

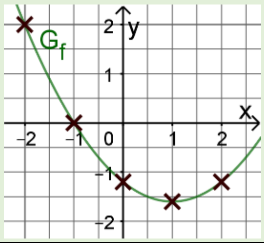
Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto 0{,}4x^2 - 0{,}8x - 1{,}2$
Funktionsgleichungen: $f(x) = 0{,}4x^2 - 0{,}8x - 1{,}2$
$y = \underbrace{0{,}4x^2 - 0{,}8x - 1{,}2}_{\text{Funktionsterm}}$

Alle drei Schreibweisen legen dieselbe Funktion fest.

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	0	$-1{,}2$	$-1{,}6$	$-1{,}2$

Graph:



$D_f = \mathbb{Q}$
$W_f = [-1{,}6; \infty[$

1.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Eine **Nullstelle** ist die x − Koordinate eines Schnittpunktes vom Funktionsgraphen mit der **x − Achse**.
Die y − Koordinate eines solchen Punktes ist immer Null.

Ansatz zur Bestimmung von Nullstellen: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Mit dem **y − Achsenabschnitt** bezeichnet man die y − Koordinate des Schnittpunktes vom Funktionsgraphen mit der **y − Achse**. Die x − Koordinate eines solchen Punktes ist immer Null.

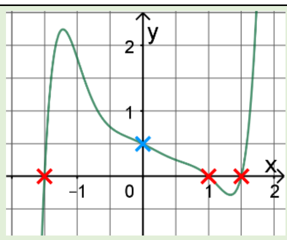
Bestimmung des y-Achsenabschnitts: **Berechne $\boldsymbol{f(0)}$**.

Nullstellen:

$x_1 = -1{,}5; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1{,}5$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$(-1{,}5|0); \quad (1|0); \quad (1{,}5|0)$



y − Achsenabschnitt:

$y = 0{,}5$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$(0|0{,}5)$

1.3 Schnittpunkte von Graphen

Den (oder die) Schnittpunkt(e) zweier Graphen bestimmt man rechnerisch so:

1. Funktionsterme gleichsetzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. y − Wert(e) bestimmen, indem man den (die) ermittelten x − Wert(e) in einen der Funktionsterme einsetzt

Bsp.: *Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen*
$f(x) = 2x - 3$ *und* $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad |+\frac{1}{2}x + 3$
$2{,}5x = 4 \quad |:2{,}5$
$x = 1{,}6 \qquad y = f(1{,}6) = 2 \cdot 1{,}6 - 3 = 0{,}2 \qquad S(1{,}6|0{,}2)$ ist der Schnittpunkt.

1.4 Lineare Funktionen

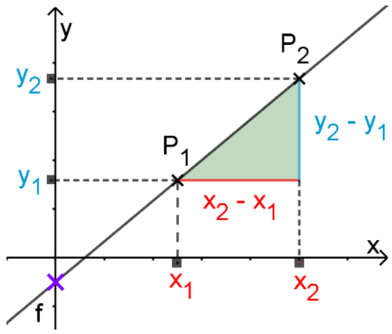
Eine Funktion, in deren Funktionsterm die Funktionsvariable (meist x) nur in einer Potenz mit dem Exponenten 1 (also x^1) vorkommt, heißt **lineare Funktion**. Der zugehörige Graph heißt **Gerade**.

Allgemeine Form: $\boldsymbol{y = m \cdot x + t}$

$\boldsymbol{t}$ gibt den $\boldsymbol{y}$ **– Achsenabschnitt** der Geraden an.

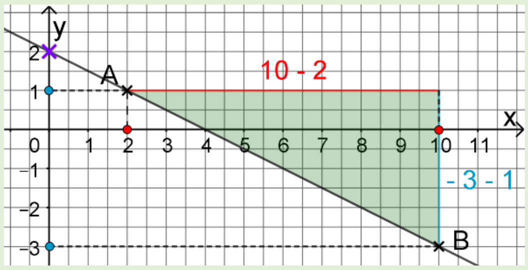
$\boldsymbol{m}$ gibt die **Steigung** der Geraden an.

Sie lässt sich mithilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen: $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$



$\boldsymbol{m > 0}$	die Gerade steigt
$\boldsymbol{m < 0}$	die Gerade fällt
$\boldsymbol{m = 0}$	die Gerade verläuft waagerecht (konstante Funktion)

Bsp.: Ermittle durch Rechnung die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $A(2|1)$ und $B(10|-3)$ verläuft.



1. Bestimme m: $\quad m = \frac{-3-1}{10-2} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$
2. Setze einen Punkt (z.B. Punkt A) und m in die Gleichung ein:
   $1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + t \qquad | + 1$
   Löse nach t auf: $\quad t = 2$
3. Schreibe die Geradengleichung mit eingesetztem $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{t}$ hin: $\quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

1.5 Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion, in deren Funktionsterm die Funktionsvariable (meist x) im Nenner eines Bruches vorkommt, heißt **gebrochen-rationale Funktion**. Der zugehörige Graph heißt **Hyperbel.**

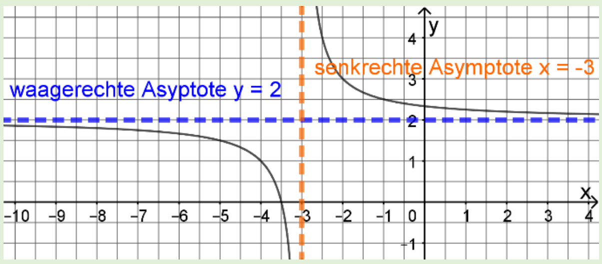
x – Werte, für die der Nenner Null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge. Sie heißen **Definitionslücken.**

Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig nahe annähert, heißt **Asymptote**. An den Definitionslücken hat der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion in der Regel eine **senkrechte Asymptote**.

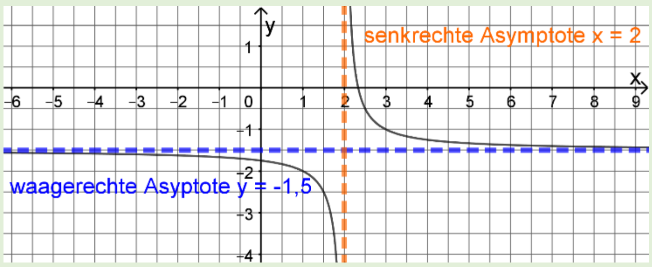
Gebrochen-rationale Funktionen mit der Funktionsgleichung $\boldsymbol{y = \frac{a}{x+b} + c}$ besitzen …
… den **Definitionsbereich** $\boldsymbol{D = \mathbb{Q}\backslash\{-b\}}$ und eine **senkrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{x = -b}$.
… eine **waagerechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = c}$.
Im Vergleich zu der Funktion mit der Gleichung $\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$ ist der **Graph** folgendermaßen **verschoben:**

für $\boldsymbol{b > 0}$ um $\lvert b \rvert$ Einheiten nach **links**	für $\boldsymbol{b < 0}$ um $\lvert b \rvert$ Einheiten nach **rechts**
für $\boldsymbol{c > 0}$ um $\lvert c \rvert$ Einheiten nach **oben**	für $\boldsymbol{c < 0}$ um $\lvert c \rvert$ Einheiten nach **unten**

$\boldsymbol{y = \frac{1}{x+3} + 2} \qquad \boldsymbol{D = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}}$



$\boldsymbol{y = \frac{0{,}5}{x-2} - 1{,}5} \qquad \boldsymbol{D = \mathbb{Q}\backslash\{2\}}$

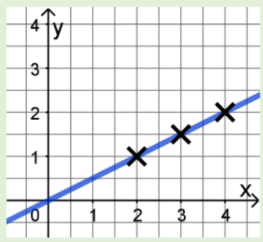


1.6 Spezialfälle

Bezeichnung	***Kennzeichen***
direkt proportionale Zuordnung	Alle Wertepaare sind **quotientengleich**. Diesen Quotienten nennt man **Proportionalitätsfaktor**. Der zugehörige Graph ist eine **Ursprungsgerade**.
indirekt proportionale Zuordnung	Alle Wertepaare sind **produktgleich**.

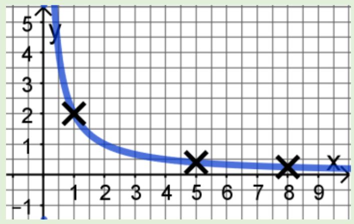
x	2	3	4
y	1	1,5	2
$\frac{y}{x}$	$\mathbf{0,5}$	$\mathbf{0,5}$	$\mathbf{0,5}$

$f(x) = 0,5x$



x	1	5	8
y	2	0,4	0,25
$x \cdot y$	**2**	**2**	**2**

$f(x) = \frac{2}{x}$



2 Bruchterme und Bruchgleichungen

2.1 Rechnen mit Bruchtermen

Grundsätzlich gelten für das Rechnen mit Bruchtermen die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit Brüchen.

Kürzen: Vor dem Kürzen von Bruchtermen ist oft das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus Zähler und Nenner nötig.

Bsp.: $\frac{6x-3}{2x^2-x} = \frac{3(2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{3}{x}$

Addieren/Subtrahieren: Vor dem Bilden des Hauptnenners zerlegt man ggf. die Nenner in Faktoren, um gleiche Faktoren erkennen zu können.

Bsp.: $\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^2-x} = \frac{3}{x \cdot x} + \frac{2}{x(x-1)} = \frac{3}{x \cdot x} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)} + \frac{2}{x(x-1)} \cdot \frac{x}{x} = \frac{3x-3}{x^3-x^2} + \frac{2x}{x^3-x^2} = \frac{5x-3}{x^3-x^2}$

Multiplizieren/Dividieren: Beim Multiplizieren von Summen müssen Klammern gesetzt werden.

Bsp.1: $\frac{4x}{1-3x} \cdot \frac{2}{2x+6} = \frac{4x \cdot 2}{(1-3x)(2x+6)} = \frac{8x}{2x+6-6x^2-18x} = \frac{8x}{-6x^2-16x+6} = \frac{2}{2} \cdot \frac{4x}{-3x^2-8x+3} = \frac{4x}{-3x^2-8x+3}$

Bsp.2: $\frac{x^2}{3x-1} : \frac{x}{x+2} = \frac{x^2}{3x-1} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x \cdot x \cdot (x+2)}{(3x-1) \cdot x} = \frac{x \cdot (x+2)}{3x-1} = \frac{x^2+2x}{3x-1}$

2.2 Lösen von Bruchgleichungen

Um Bruchgleichungen zu lösen, multipliziert man beide Seiten mit dem **Hauptnenner**. Dann löst man die Gleichung dann nach x auf.
Wenn das Ergebnis in der Definitionsmenge enthalten ist, löst es die Gleichung.

Bsp.: Löse die Gleichung $\frac{3x}{-3x+1} = \frac{5-x}{x-4}$; $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{1}{3}; 4\}$ $\quad | \cdot (-3x+1)(x-4)$

$\frac{3x}{-3x+1} \cdot (-3x+1)(x-4) = \frac{5-x}{x-4} \cdot (-3x+1)(x-4)$ $\quad$ |Kürzen ergibt ein „Überkreuzmultiplizieren“

$3x \cdot (x-4) = (5-x) \cdot (-3x+1)$

$3x^2 - 12x = -15x + 5 + 3x^2 - x$ $\quad | -3x^2 + 16x$

$4x = 5$ $\quad |:4$

$x = \frac{5}{4}$ $\qquad \frac{5}{4} \in D \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}$ löst die Gleichung.

3 Rechengesetze für Potenzen

1. Potenzen mit gleicher Basis	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	bzw.	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
2. Potenzen mit gleichem Exponenten	$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	*bzw.*	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
3. Potenzen von Potenzen	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$		
*„Eine Potenz wird potenziert, indem man die beiden **Exponenten miteinander multipliziert**."*			

4 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

4.1 Definition Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Variablen** (z.B. x und y) besteht aus zwei Gleichungen, in denen jeweils beide Variablen in einer Potenz mit Exponent 1 (also x^1 und y^1) vorkommen.
Ein Zahlenpaar $(x|y)$ heißt Lösung des Gleichungssystems, wenn es beide Gleichungen des Systems erfüllt.

4.2 Grafisches Lösen eines LGS

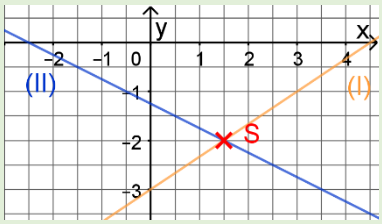
1. **Umstellen der beiden Gleichungen nach y**
   Diese können als Funktionsgleichung linearer Funktionen aufgefasst werden.
2. **Zeichnen der beiden Geraden zu den linearen Funktionen**
3. **Die gemeinsamen Punkte beider Geraden sind Lösungen des Gleichungssystems.**

Bsp.: Löse das LGS:
(I) $2x - 3y = 9 \quad | + 3y - 9$
(II) $2x + 4y = -5 \quad | - 2x$

Umstellen nach y:
(Ia) $2x - 9 = 3y \quad |: 3$
(IIa) $4y = -2x - 5 \quad |: 4$

(Ib) $y = \frac{2}{3}x - 3$
(IIb) $y = -0{,}5x - 1{,}25$

Graphen:



Der Schnittpunkt $(1{,}5|-2)$ gibt die Lösung des LGS an. $\Rightarrow L = \{(1{,}5|-2)\}$

Sonderfälle:
1. Die beiden Geraden sind identisch. Dann hat das LGS **unendlich viele Lösungen**.
2. Die beiden Geraden verlaufen parallel, aber nicht aufeinander. Dann hat das LGS **keine Lösung**.

4.3 Rechnerisches Lösen eines LGS

1. Löse eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen **auf** (z.B. x).	(I) $x - 3y = 4 \quad | + 3y$ (II) $2x + 4y = -7$ ------------------------ (Ia) $x = 3y + 4$ ------------------------
2. Ersetze diese Variable in der anderen Gleichung.	(Ia) in (II) einsetzen: $2 \cdot (3y + 4) + 4y = -7$
3. Löse nach der verbleibenden Variablen (z.B. y) **auf**.	$6y + 8 + 4y = -7 \quad | - 8$ $10y = -15 \quad |: 10$ $y = -1{,}5$ ------------------------
4. Setze den errechneten Wert (für z.B. y) in die nach der ersten Variablen (z.B. x) umgestellten Gleichung **ein** und erhalte so deren Wert.	(Ia) $x = 3 \cdot (-1{,}5) + 4 = -0{,}5$ $\Rightarrow L = \{(-0{,}5|-1{,}5)\}$

5 Zufallsexperimente

5.1 Grundbegriffe

Zufallsexperiment: Vor der Durchführung eines Zufallsexperiments sind alle möglichen Ergebnisse bekannt. Bei der Durchführung des Experiments tritt dann genau ein Ergebnis ein, das sich aber nicht vorhersagen lässt.

Ergebnismenge: Sie umfasst alle möglichen Versuchsausgänge. Bezeichnung: $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3; \dots\}$

Ereignis: Ein Ereignis A besteht aus mehreren, einem oder keinem Ergebnis. A ist eine Teilmenge von Ω ($A \subset \Omega$).

Gegenereignis: Alle Ergebnisse aus der Ergebnismenge, die nicht zum Ereignis A gehören, bilden zusammen das Gegenereignis $\bar{A}$: $\bar{A} = \Omega \backslash A$

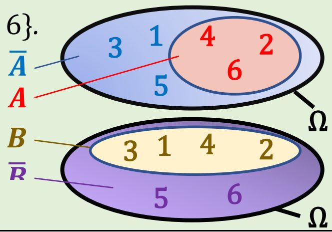
*Bsp.: Ein Würfel wird einmal geworfen. Die **Ergebnismenge** ist also* $\boldsymbol{\Omega} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

*Man kann z.B. folgende **Ereignisse** beschreiben:*

$\boldsymbol{A}$: „Der Würfel zeigt eine gerade Zahl.“ $A = \{2; 4; 6\}$

$\boldsymbol{B}$: „Der Würfel zeigt eine kleinere Zahl als die 5.“ $B = \{1; 2; 3; 4\}$

*Die entsprechenden **Gegenereignisse** sind* $\bar{\boldsymbol{A}} = \{1; 3; 5\}$ *und* $\bar{\boldsymbol{B}} = \{5; 6\}$.



5.2 Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen **alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich** sind, heißen **Laplace-Experimente.**

In einem Laplace-Experiment berechnet man die **Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P(A)}$** eines Ereignisses A so:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{\Omega}|}$$

Bsp.: Wenn ein idealer Würfel einmal geworfen wird, ist dies ein Laplace-Experiment, da alle sechs Zahlen gleich wahrscheinlich sind. Die oben beschriebenen Ereignisse A und B haben diese Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

5.3 Zählprinzip

Wird aus k Mengen $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ mit $|M_1|, |M_2|, |M_3|, \dots, |M_k|$ Elementen jeweils ein Element gewählt, so erhält man die Anzahl der möglichen Kombinationen durch folgende Multiplikation:

$$|M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| \cdot \dots \cdot |M_k|$$

Bsp.: An einem Gymnasium wird einmal im Jahr Schulkleidung mit dem eigenen Logo bestellt. Es gibt für Jungen und Mädchen jeweils fünf verschiedene Modelle, die man in vier verschiedenen Farben bestellen kann. Berechne, wie viele verschiedenartige Kleidungsstücke bestellt werden können.

$M_1 = \{\text{Junge}, \text{Mädchen}\}$

$M_2 = \{\text{Modell 1}, \text{Modell 2}, \text{Modell 3}, \text{Modell 4}, \text{Modell 5}\}$

$M_3 = \{\text{Farbe 1}, \text{Farbe 2}, \text{Farbe 3}, \text{Farbe 4}\}$

Man kann insgesamt $|M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ *verschiedenartige Kleidungsstücke bestellen.*

6 Kreis, Prisma und Zylinder

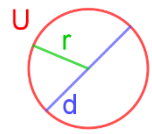
6.1 Die Kreiszahl π

Die Kreiszahl π ist eine Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen.

$\pi \notin \mathbb{Q}$ π kann nur näherungsweise bestimmt werden: $\boldsymbol{\pi \approx 3{,}14}$

6.2 Der Kreis

Für einen Kreis mit dem Durchmesser d bzw. mit dem Radius r lassen sich der Umfang U und der Flächeninhalt A folgendermaßen berechnen:

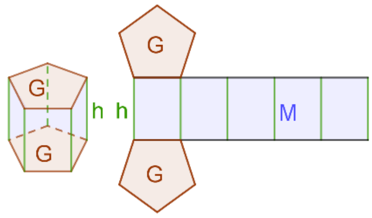


$$\boldsymbol{U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d} \qquad \boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$$

6.3 Prisma und Zylinder

Das **Volumen** $\boldsymbol{V}$ eines **geraden Prismas** bzw. eines **geraden Zylinders** berechnet man aus **Grundfläche** $\boldsymbol{G}$ und **Höhe** $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{V = G \cdot h}$

Den **Oberflächeninhalt** $\boldsymbol{O}$ eines **geraden Prismas** bzw. eines **geraden Zylinders** berechnet man aus **Grundfläche** $\boldsymbol{G}$ und **Mantelfläche** $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{O = 2 \cdot G + M}$



Da die Grundfläche des Zylinders ein Kreis ist, lassen sich die Formeln hierfür präzisieren (mit dem Radius r der Grundfläche):

$$\boldsymbol{V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h} \qquad \boldsymbol{O_{Zylinder} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h}$$