1 Exponentialfunktion und Logarithmus

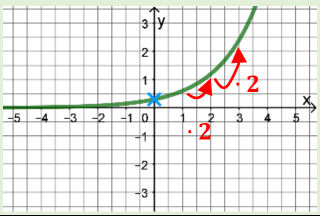
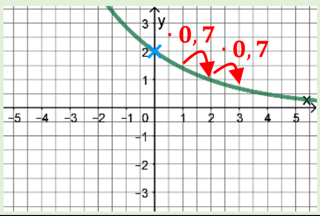
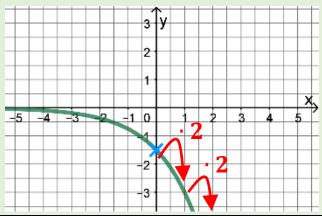
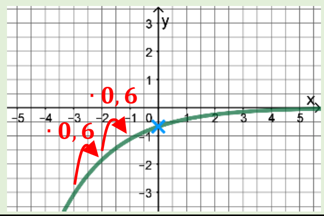
1.1 Exponentialfunktion

Eine Funktion, in deren Funktionsterm die Funktionsvariable (meist x) im Exponenten einer Potenz vorkommt, heißt **Exponentialfunktion**. Der zugehörige Graph heißt **Exponentialkurve.**

Allgemeine Form der Funktionsgleichung: $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^x}$ $(a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R})$

Der **Wachstumsfaktor a** gibt den Quotienten aus einem Funktionswert und dem Funktionswert seines Vorgängers an und ist Kennzeichen für exponentielles Wachstum: $\boldsymbol{a = \frac{f(x+1)}{f(x)}}$

$\boldsymbol{b}$ bezeichnet man als **Startwert**. Er gibt den Funktionswert $\boldsymbol{f(0)}$ an.

<table>
<tr><td colspan="4">Die x-Achse ist stets waagerechte Asymptote des Graphen.</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{b > 0}$ und $\boldsymbol{a > 1}$</td><td>$\boldsymbol{b > 0}$ und $\boldsymbol{0 < a < 1}$</td><td>$\boldsymbol{b < 0}$ und $\boldsymbol{a > 1}$</td><td>$\boldsymbol{b < 0}$ und $\boldsymbol{0 < a < 1}$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 0{,}3 \cdot 2^x$</td><td>$f(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$</td><td>$f(x) = -1{,}5 \cdot 2^x$</td><td>$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot 0{,}6^x$</td></tr>
<tr><td>„positives exponentielles Wachstum“
</td><td>„negatives exponentielles Wachstum“
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Für $\boldsymbol{b > 0}$ verläuft der Graph oberhalb der x-Achse.
Wertemenge: $\boldsymbol{W_f} = \mathbb{R}^+$</td><td colspan="2">Für $\boldsymbol{b < 0}$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.
Wertemenge: $\boldsymbol{W_f} = \mathbb{R}^-$</td></tr>
<tr><td>Der Graph ist streng monoton steigend.</td><td>Der Graph ist streng monoton fallend.</td><td>Der Graph ist streng monoton fallend.</td><td>Der Graph ist streng monoton steigend.</td></tr>
</table>

1.2 Exponentialgleichungen und Logarithmus

Die Exponentialgleichung $\boldsymbol{a^x = b}$ $\quad (a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1; x \in \mathbb{R})$ hat genau eine Lösung, nämlich:

$$\boldsymbol{x = log_a(b)}$$ *sprich: **„Logarithmus von b zur Basis a“***

Aus dieser Definition des Logarithmus und den Rechengesetzen für Potenzen folgt:

Regel für das Rechnen mit Logarithmen:	$log_a(b^{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x} \cdot log_a(b)$

<table>
<tr><td colspan="2">Bsp.: Löse die Gleichungen.</td></tr>
<tr><td>a) $2 \cdot 3^x = 486 |: 2$
$3^x = 243$ |Definition des Logarithmus
$x = \log_3(243)$
$x = 5$</td><td>b) $\log_5(25^{2x+1}) = 1$ |Rechengesetz für Logarithmen
$(2x + 1)\log_5(25) = 1$
$(2x + 1) \cdot 2 = 1$
$4x + 2 = 1$
$x = -\frac{1}{4}$</td></tr>
</table>

Der Logarithmus zur Basis 10 wird auch **dekadischer Logarithmus** genannt. Für ihn gibt es die Kurzschreibweise **lg**.

Bsp.:	$\lg(1000) = \log_{10}(1000) = 3$	$\lg(0{,}01) = \log_{10}(0{,}01) = -2$

2 Sinus- und Kosinusfunktion

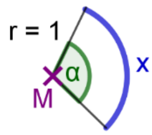
2.1 Bogenmaß und Gradmaß

Ist **α im Gradmaß** gegeben, so berechnet man das zugehörige **Bogenmaß** x folgendermaßen: $x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$

Ist x **im Bogenmaß** gegeben, so berechnet man das zugehörige **Gradmaß α** folgendermaßen: $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$

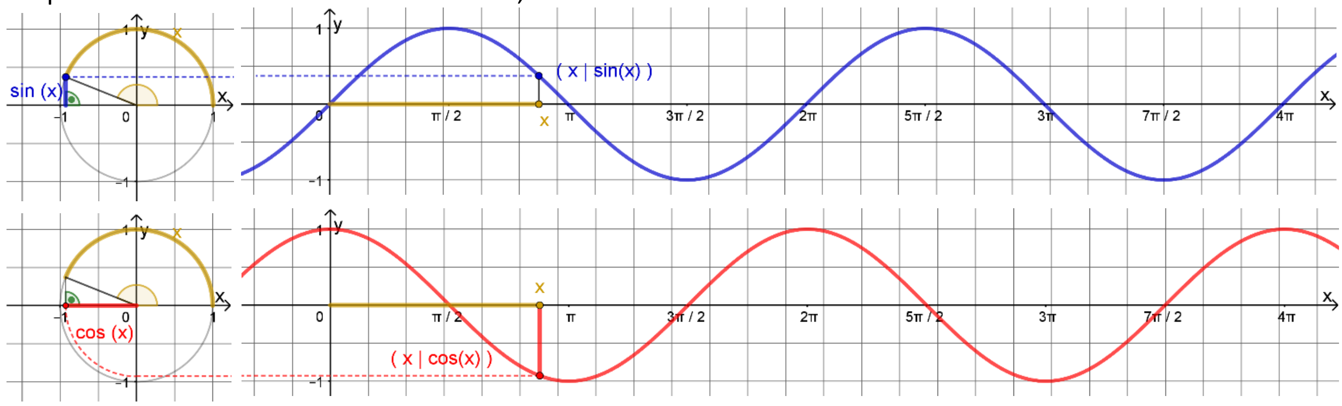
Wichtige Bogenmaße:

α im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
x im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π



2.2 Sinus- und Kosinusfunktion

Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ ordnen jedem Winkel x im Bogenmaß den entsprechenden Sinus- bzw. Kosinuswert zu, der sich auch mithilfe des Einheitskreises darstellen lässt:



Beide Funktionen haben die **Wertemenge** $[-1; 1]$ und sind periodisch mit der **Periodenlänge** 2π.
Es gilt also: $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ bzw. $\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$

2.3 Die allgemeine Sinusfunktion

Der Graph einer Sinusfunktion in der Form $h(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$
entsteht aus dem Graphen zur Funktion $f(x) = \sin(x)$ folgendermaßen:

a: **Streckung** mit dem Faktor $|a|$ in y **–Richtung**, bei negativem a Spiegelung an der x – Achse
Die **Amplitude** ist $|a|$.

b: **Streckung** mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ in x **–Richtung**, bei negativem a Spiegelung an der y –Achse
Die **Periodenlänge** ist $\frac{2\pi}{|b|}$.

c: **Verschiebung** um $-c$ in x **–Richtung**

d: **Verschiebung** um d in y **–Richtung**

Bsp.: $h(x) = -3 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 0,5$

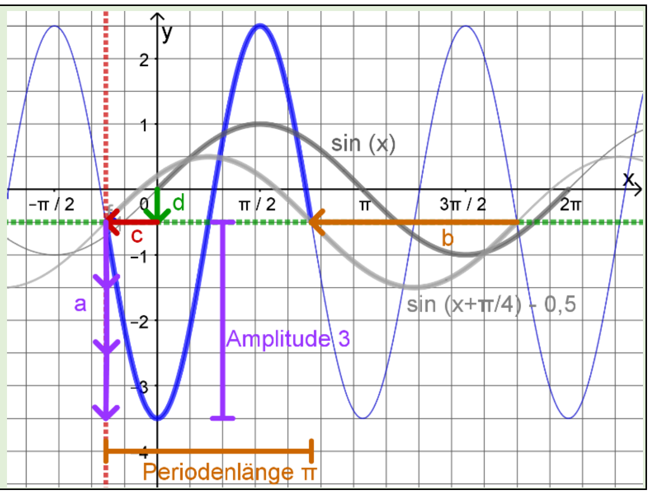
a: **Streckung mit dem Faktor $|-3| = 3$ in y – Richtung**
Spiegelung an der x – Achse
Amplitude $|-3| = 3$

b: **Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{|2|}$ in x – Richtung**

Periodenlänge $\frac{2\pi}{2} = \pi$

c: **Verschiebung um $-\frac{\pi}{4}$ in x – Richtung**

d: **Verschiebung um $-0,5$ in y – Richtung**



3 Ganzrationale Funktionen

3.1 Definition Polynom und ganzrationale Funktion

Ein Term der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ heißt **Polynom vom Grad n**.

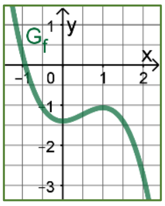
Die Faktoren $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Eine Funktion, deren Funktionsterm sich als Polynom vom Grad n schreiben lässt, heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades.** Sie ist für alle reellen Zahlen definiert.

Bsp.: $f(x) = 4x^6 - \frac{2}{3}x^4 + 0{,}6x^3 + x^2 - 7$ *ist eine ganzrationale Funktion* ***6. Grades****.*

$g(x) = 2(x - 3x^2)\left(1 - \frac{5}{3}x^3\right) = 10x^5 - \frac{10}{3}x^4 - 6x^2 + 2x$ *ist eine ganzrationale Funktion* ***5. Grades****.*

3.2 Verlauf an den Rändern des Definitionsbereichs



Das **Verhalten der Funktionswerte für betragsmäßig große $x-$ Werte** gibt der **Summand mit der höchsten Potenz von x** vor. (vgl. hierzu Grundwissen 9, Kapitel 4.3)

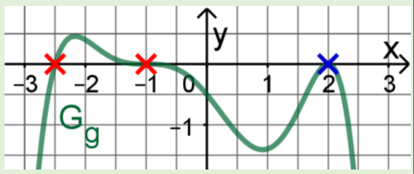
Bsp.: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 1{,}4}$ *„Der Graph G_f verläuft von links oben nach rechts unten."*

3.3 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens **n Nullstellen.**
Den Verlauf des Graphen in der Nähe einer Nullstelle kann man an deren Vielfachheit ablesen:

ungerade Vielfachheit:	**Vorzeichenwechsel der Funktionswerte:**	**Der Graph schneidet die $x-$ Achse.**
gerade Vielfachheit:	**kein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte:**	**Der Graph berührt die $x-$ Achse.**

Bsp.: $\boldsymbol{g(x) = p(x) = -\frac{1}{20}(x+2{,}5)(x+1)^3(x-2)^2}$



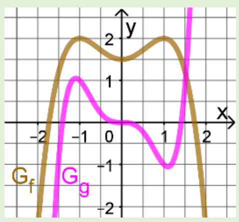
Die Funktion g hat ***Nullstellen mit Vorzeichenwechsel*** *bei* $\boldsymbol{x = -2{,}5}$ ***(einfache Nullstelle)*** *und bei* $\boldsymbol{x = -1}$ ***(dreifache Nullstelle)*** *sowie eine* ***Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel*** *bei* $\boldsymbol{x = 2}$ ***(doppelte Nullstelle)****.*

3.4 Symmetrie von Funktionsgraphen

Bestimmte Symmetrien von Funktionsgraphen lassen sich rechnerisch nachweisen:

Art der Symmetrie	Bedingung für alle $x \in D$	Bezeichnung der Funktion
Achsensymmetrie zur y-Achse	$f(-x) = f(x)$	gerade Funktion
Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung	$f(-x) = -f(x)$	ungerade Funktion

Bsp.: $\boldsymbol{f(x) = -0{,}5x^4 + x^2 + 1{,}5}$ *und* $\boldsymbol{g(x) = x^5 - 2x^3}$



Nachweis der Achsensymmetrie zur y-Achse:
$\boldsymbol{f(x-) = -0{,}5(-x)^4 + (-x)^2 + 1{,}5 = -0{,}5x^4 + x^2 + 1{,}5 = f(x)}$
Nachweis der Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung:
$\boldsymbol{g(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 = -x^5 + 2x^3 = -(x^5 - 2x^3) = -g(x)}$

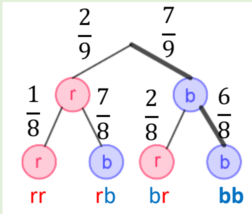
4 Die Pfadregeln

4.1 Die 1. Pfadregel

Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich mithilfe von Baumdiagrammen darstellen. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

Bsp.:
In einer Urne sind zwei rote und sieben blaue Kugeln. Es wird nacheinander zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei blaue Kugeln gezogen werden.

$$P(bb) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$$

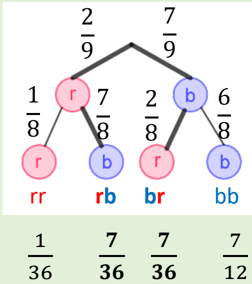


4.2 Die 2. Pfadregel

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse addiert, die für dieses Ereignis günstig sind.

Bsp.:
In einer Urne sind vier rote und fünf blaue Kugeln. Es wird nacheinander zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: Zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe werden gezogen.

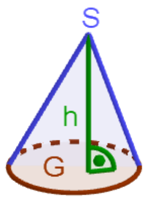
$$P(A) = P(\boldsymbol{rb}) + P(\boldsymbol{br}) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}} = \frac{7}{18}$$

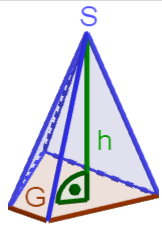


5 Raumgeometrie

5.1 Allgemeine Pyramiden und Kegel

Das **Volumen V** einer beliebigen **Pyramide** bzw. eines beliebigen **Kegels** berechnet man aus **Grundfläche G und Höhe h:** $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

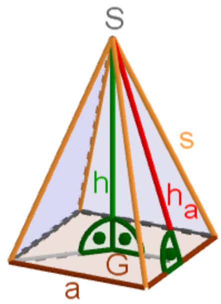




Den **Oberflächeninhalt O** einer **Pyramide** bzw. eines **Kegels** berechnet man aus **Grundfläche G** und **Mantelfläche M**: $O = G + M$

5.2 Gerade Pyramiden und Kegel

Für Berechnungen in geraden Pyramiden und Kegeln sind folgende zusätzlichen Größen und die Anwendung des Satzes von Pythagoras hilfreich:



<u>**In der Pyramide:**</u> **Grundkante a**, **Seitenkante s**, **Seitenhöhe h_a**

*Bsp.: In einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und **Grundkante $a = 3cm$** und **Pyramidenhöhe $h = 4cm$** berechnet man:*

Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9cm^2 \cdot 4\ cm = 12\ cm^3$

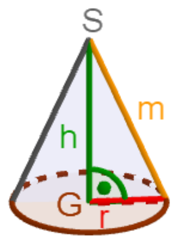
Seitenhöhe $h_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3\ cm}{2}\right)^2 + (4\ cm)^2} = \sqrt{2,25\ cm^2 + 16\ cm^2} \approx 4,27\ cm$

Damit ist der

Oberflächeninhalt $O = G + M = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot h_a\right) \approx 9cm^2 + 2 \cdot 3cm \cdot 4,27\ cm = 43,62\ cm^2$

<u>**Im Kegel:**</u> **Radius r der Grundfläche**, **Mantellinie m**

Die **Mantelfläche** eines geraden Kegels berechnet sich mit der Formel $M = \pi\, r\, m$ und entsprechend gilt für den **Oberflächeninhalt:** $O = G + M = \pi r^2 + \pi\, r\, m$



Bsp.: In einem geraden Kegel mit Radius $r = 2cm$ und Höhe $h = 5cm$ berechnet man:

Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\ cm^2 \cdot 5\ cm \approx 20,94\ cm^3$

Mantellinie $m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2\ cm)^2 + (5\ cm)^2} = \sqrt{29\ cm^2} \approx 5,39\ cm$

*Damit ist die **Mantelfläche*** $M = \pi\, r\, m = \pi \cdot 2\ cm \cdot \sqrt{29\ cm^2} \approx 33,84\ cm^2$

*und der **Oberflächeninhalt*** $O = G + M = \pi r^2 + M \approx \pi \cdot 4\ cm^2 + 33,84\ cm^2 \approx 46,41\ cm^2$.

5.3 Kugel

In einer Kugel mit Radius r berechnet man:

Volumen $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ **Oberflächeninhalt** $O = 4 \pi r^2$